Ueber
einige bemerkenswerthe Eigenschaften
der
CISSOIDE.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Fakultät zu Marburg

eingereicht von

Franz Wünnenberg,
aus Nienborg i. W.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).
1884.

Seinen lieben Eltern

zur

silbernen Hochzeit!

Der Verfasser.

Einleitung.

Die Cissoide wurde zuerst vom griechischen Mathematiker Diokles*) konstruirt zur geometrischen Lösung des sogenannten delischen Problems von der Verdoppelung der Würfels, welches sich zurückführen lässt auf die Aufgabe zwischen 2 gegebenen Grössen 2 mittlere stetige Proportionale einzuschalten. Abgesehen von dieser ihrer praktischen Bedeutung und der eleganten von Newton angegebenen Erzeugung derselben durch die stetige Bewegung eines rechten Winkels, verdient diese Kurve noch weiter unsere besondere Beachtung durch die nahen Beziehungen, in welche sie nach Ausbildung der analytischen Geometrie zum Kreise und zur Parabel gesetzt wurde. Einerseits erhielt man sie nämlich als die Fusspunktcurve der Parabel**), den Scheitel als Pol genommen, von dem aus die Normalen auf die Parabeltangenten gefällt werden — andererseits konnte man sie auch als den Ort definiren, auf dem die Endpunkte der Polartangenten eines Kreises liegen, wenn der Anfangspunkt der Koordinaten auf der Peripherie des Kreises angenommen wird***). Nach der von Clebsch eingeführten Klassification ist die Cissoide eine Kurve vom Geschlecht Null, und desshalb können die Koordinaten eines jeden Punktes auf ihr als rationale algebraische Funktionen eines variabeln Parameters ausgedrückt werden, wie dieses allgemein bei Curven 2. Ordnung der Fall

*) cfr. Klügel math. Wörterbuch B. I. pag. 434.
**) cfr. Schlömilch Aufgaben-Samml. § 19. 1.
***) cfr. Magnus Aufgaben-Samml. § 74. Auf. 120.

ist. Daher liegt es nahe, zu untersuchen, ob nicht für die Beziehungen die zwischen drei Punkten bestehen, welche auf diesen drei Kurven, der Parabel, dem Kreise und der Cissoide liegend Werthen desselben Parameters angehören, bei Annahme besonderer Lage einfache Formen sich aufstellen lassen, die zugleich zu einer leichten geometrischen Deutung und zu neuen Sätzen über die Cissoide führen.

Wir wollen als Gegenstand der folgenden, auf Veranlassung unseres hochverehrten Lehrers des Herrn Prof. Dr. C. A. von Drach unternommenen Betrachtung die specielle Lage behandeln, bei welcher der Kreis symmetrisch zur Parabelaxe liegend durch den Scheitel und Brennpunkt geht, welcher Fall zu interessanten Entstehungsweisen, Tangenten und Normalen Konstruktionen der Cissoide verhilft. Es wird jedoch zweckmässig sein, vorher die allgemeinen Eigenschaften dieser Kurve zu erörtern, und dann zur Ableitung jener Beziehungen überzugehen.

I.

§. 1.

Die Gleichung der Cissoide zwischen rechtwinkligen Koordinaten kann geschrieben werden*):

(1) . . . . . $x^3 = y^2(2a - x)$

Dann ist der Anfangspunkt der Koordinaten ein Doppelpunkt, wie aus dem Fehlen des absoluten Gliedes und der Glieder vom ersten Grade folgt, und zwar specieller da das vorhandene Glied 2. Grades gleich Null gesetzt die beiden gleichen Wurzeln

$$y_1 = y_2 = 0$$

liefert, die Tangenten in ihm also zusammenfallen, ein Rück-

*) cfr. Salmon-Fiedler höhere ebene Kurven Art. 215.

kehrpunkt, dessen Tangente die Axe der X ist*). Da eine Kurve dritter Ordnung nur einen Doppelpunkt haben kann, weil andernfalls, wenn zwei Doppelpunkte vorhanden wären, die Verbindungslienie dieser, 4 Punkte mit der Kurve gemein hatte, so besitzt die Cissoide des Maximum von möglichen Doppelpunkten, sie ist eine Kurve vom Geschlecht oder Defect Null, eine Unikursal-Kurve. Wegen der vorhandenen Spitze besitzt sie nur einen Wendepunkt und zwar liegt dieser im Unendlichen.

$$x = 2a$$

ist die Wendetangente, die Axe der Y verbindet daher die Spitze mit dem Wendepunkte und jede Parallele zu dieser geht also durch letzteren.

Mit Rücksicht auf die bekannten Relationen

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$

drücken sich die Koordinaten eines Punktes der Cissoide als Funktionen der variabeln Perameters

$$t = tang\, \varphi$$

aus der Gleichung (1) in der Form aus:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} x = \dfrac{2at^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2at^3}{1+t^2} \end{cases}$$

Ist also

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad y = tx$$

die Gleichung eines Strahlenbüschels durch 0, den Anfangspunkt der Koordinaten, so resultirt die Cissoide als die Schnittkurve

---

*) cfr. Salmon-Fiedler höhere ebene Kurven Art. 213 auch Durège Tangenten der Kurven 3. Ordnung. Math. Annal. B. I.

dieses Büschels (3) mit den entsprechenden Strahlen eines Parallelstrahlenbüsehels

$$(3a) \quad \ldots\ldots \quad x = \frac{2at^2}{1+t^2}$$

welches letztere natürlich nicht zu ersterem projectivisch ist, sondern zu ihm in der sogenannten ein- zweideutigen Beziehung steht, in der Art, dass zu jedem Werth von t^2 d. i. zu jedem Strahl des Büschels (3a) zwei symmetrisch liegende Stnahlen durch 0 gehören, während umgekehrt zu jedem Strahl durch 0 nur ein entsprechender des Parallelbüschels gehört. Andererseits erhalten wir durch Verbindung von (3) direkt mit Gleichung (1) die Cissoide als den Ort der Durchschnittspunkte eines Kreisbüschels

$$x^2 + y^2 - 2aty = 0$$

dessen Basispunkte in der Spitze liegen, mit den zugehörigen Strahlen des zu ihm projektivischen Büschels (3). Diese Beziehung können wir zu einer einfachen geometrischen Konstruktion verwerthen.

Ist (Fig. 1) MN ein beliebiger durch 0 gehender Strahl, so ist der Abschnitt, den diese Gerade auf RS einer im Abstand $0R = 2a$ zur Axe der Y gezogen Parallelen macht

$$RF = 2at$$

d. i. mit Rücksicht auf die obige Gleichung des Kreisbüschels der Durchmesser des gesuchten Kreises, der gemäss der Gleichung die Axe der X in 0 berühren muss. Ziehen wir also $FG \parallel R0$, und schlagen über $G0$ als Durchmesser einen Kreis, so ist der Punkt C, in welchem er ausser in 0 die Gerade MN noch schneidet, ein Punkt der Cissoide.

Jedem Zahlenwerth von t entspricht nur ein bestimmter Punkt der Kurve, welcher durch (2) bestimmt ist, und ebenso gehört umgekehrt zu jedem Punkt nur ein Werth von t, nämlich

$t = \frac{y}{x}$. Für $t = 0$ erhalten wir die Spitze und für $t = \infty$ den Wendepunkt.

Die Gleichungen der 3 Asymptoten, die der Cissoide zukommen, lassen sich auf folgende Weise ableiten*). Zerlegen wir in der Gleichung (1) die Glieder dritten Grades $x^3 + xy^2$ in

$$x(x + \sqrt{-1}\,.\,y)(x - \sqrt{-1}\,.\,y)$$

so gelten für die 3 Asymptosen die Gleichungen:

$$x + \lambda_1 = 0$$
$$x + \sqrt{-1}\,.\,y + \lambda_2 = 0$$
$$x - \sqrt{-1}\,.\,y + \lambda_3 = 0$$

wobei die Werthe λ die Identität erfüllen:

$$\frac{-2ay^2}{x(x+\sqrt{-1}\,.\,y)(x-\sqrt{-1}\,.\,y)} = \frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda_2}{x+\sqrt{-1}\,.\,y} + \frac{\lambda_3}{x-\sqrt{-1}\,.\,y}$$

hieraus folgt

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 = -2a$$
$$\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

Setzen wir die Werthe von λ ein, so erhalten wir die gesuchten Gleichungen in der Form:

$$x - 2a = 0$$
$$x + \sqrt{-1}\,.\,y + a = 0$$
$$x - \sqrt{-1}\,.\,y + a = 0$$

Nur eine Asymptote ist also reell und fällt (wegen des unendlich fernen Wendepunktes) mit der Wendetangente zusammen, während die beiden andern konjugirt immaginär sind und den reellen Schnittpunkt

---

*) Salmon-Fiedler höhere ebene Kurven Art. 52.

$$x = -a$$
$$y = 0$$

liefern.

Mit Hülfe der in (2) aufgestellten Werthe lässt sich auch in leichter Weise zeigen, wie die Cissoide die Lösung des bekannten delischen Problems liefert. Verbinden wir R mit dem Mittelpunkte Q des in 0^1 der Mitte des Leitkreises zur Axe der X senkrechten Radius und verlängern RQ bis zum Durchschnitt L mit der Cissoide, so ist

$$\frac{a}{2} : a = y : (2a - x)$$

worin x und y die Koordinaten von L bedeuten. Substituiren wir für diese die sich aus (2) ergebenden Werthe so wird

$$\frac{a}{2} : a = \frac{2at^3}{1+t^2} : \left(2a - \frac{2at^2}{1+t^2}\right) \text{ oder}$$
$$t^3 = \frac{1}{2}$$

Setzen wir wiederum $t = \frac{y}{x}$ so ist

$$x^3 = 2y^3$$

d. i. das delische Problem. Dasselbe ist also zurückgeführt auf die Construktion von

$$t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

die sich allgemein natürlich nur mit Kurven dritter Ordnung lösen lässt.

§ 2.

Zur Bestimmung der 3 Schnittpunkte einer Geraden

(4) . . . . . , $y = mx + n$

mit der Cissoide erhalten wir durch Elimination von x und y aus (4) und (2)

(5) . . . . . $2at^3 - t^2(2am + n) - n = 0$

oder, wenn wir $t = \frac{1}{t'}$ setzen

(5a) . . . . . $nt'^3 + t'(2am + n) - 2a = 0$

Die Wurzeln t'_1, t'_2, t'_3 dieser kubischen Gleichung ergeben sich sofort nach den kardanischen Formeln als die reciproken Werthe, die den drei Parametern der Durchschnittspunkte jener Geraden (4) mit der Cissoide angehören.

Nach einem bekannten Satze der Algebra resultiren aus (5) und (5a) dann folgende Beziehungen für diese 3 Parameter resp. für deren reciproke Werthe:

(6) . . . . . $\begin{cases} 1. \quad t_1 + t_2 + t_3 = \frac{2am+n}{2a} \\ 2. \quad t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0 \\ 3. \quad t_1t_2t_3 = \frac{n}{2a} \end{cases}$

(6a) . . . . . $\begin{cases} 1. \quad t'_1 + t'_2 + t'_3 = 0 \\ 2. \quad t'_1t'_2 + t'_2t'_3 + t'_3t'_1 = \frac{2am+n}{2a} \\ 3. \quad t'_1t'_2t'_3 = \frac{2a}{n} \end{cases}$

Da $t = \frac{y}{x}$ also $t' = \frac{x}{y}$ so können wir die Bedingung (6a1) auch so schreiben

(6b) . . . . . $\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} = 0$

oder mit Benutzung der Kurven-Gleichung (1)

(6c) . . . . $\sqrt{\frac{2a - x_1}{x_1}} + \sqrt{\frac{2a - x_2}{x_2}} + \sqrt{\frac{2a - x_3}{x_3}} = 0$

worin die x und y die rechtwinkligen Koordinaten der 3 Durchschnittspunkte sind.

Ebenso lässt sich die Umkehrung beweisen, dass 3 Punkte der Cissoide, deren Parameter einer der Bedingungen (6) genügen, auf einer Geraden liegen. Denn dieses findet bekanntlich unter der Voraussetzung statt, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 1 \\ x_2 y_2 1 \\ x_3 y_3 1 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Setzen wir hierin die Werthe für x und y aus (2) ein, wobei wir $2a$, das ohne Einfluss auf das Verschwinden der Determinante ist, weglassen können, so erhalten wir

$$\begin{vmatrix} \frac{t_1^2}{1+t_1^2}, \frac{t_1^3}{1+t_1^2}, 1 \\ \frac{t_2^2}{1+t_2^2}, \frac{t_2^3}{1+t_2^2}, 1 \\ \frac{t_3^2}{1+t_3^2}, \frac{t_3^3}{1+t_3^2}, 1 \end{vmatrix} = (1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2) \begin{vmatrix} t_1^2, t_1^3, 1 \\ t_2^2, t_2^3, 1 \\ t_3^2, t_3^3, 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+t_1^2)(1+t^2)(1+t_3^2) \begin{vmatrix} t_1^2 - t_2^2, t_1^3 - t_2^3, 0 \\ t_2^2 - t_3^2, t_2^2 - t_3^3, 0 \\ t_3^2 \quad t_3^3 \quad 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2) \begin{vmatrix} t_1 + t_2, t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 \\ t_2 + t_3, t_2^2 + t_2 t_3 + t_3^2 \end{vmatrix}$$

welche Determinante in der That, wie sich durch Rechnung leicht ergiebt, unter der Bedingung (6_2) verschwindet.

§ 3.

Jede Parallele zur Axe der Y geht, wie früher gezeigt wurde durch den Wendepunkt; demgemäss bleibt zur Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden

$$x = b$$

mit der Cissoide nur eine Gleichung zweiten Grades in t übrig.

Setzen wir diesen Werth für x in die erste der Gleichungen (2) ein, so ergiebt sich

$$b = \frac{2at^2}{1+t^2}$$

$$t = \pm \sqrt{\frac{b}{2a-b}}$$

welche Gleichung reelle Werthe für t nur für $0 < b < 2a$ liefert. Aus den beiden entgegengesetzt gleichen Wurzeln erhellt, dass diese beiden Schnittpunkte immer symmetrisch zur Axe der X, der Symmetrie-Axe der Cissoide liegen oder mit anderen Worten, alle dem Wendepunkte in Bezug auf die Schnittpunkte einer durch ihm gehenden Geraden mit der Cissoide zugeordneten vierten harmonischen Punkte liegen auf der Axe der X, der Rückkehrtangente. Die letztere ist also nach der Beziehung von Salmon*) die harmonische Polare des Wendepunktes.

In ähnlicher Weise finden wir aus (2) für eine Gerade

$$y = c$$

parallel der Axe der X

$$2at^3 - ct^2 - c = 0 \text{ resp. wie vorhin } t = \frac{1}{t'} \text{ gesetzt}$$

$$ct'^3 + ct' - 2a = 0$$

welche Gleichung stets nur eine reelle und zwar eine positive Wurzel liefert. Jede Gerade parallel der Axe der X schneidet also die Cissoide nur in einem reellen Punkte. Der Werth $b = 0$ (für die Rückkehrtangente) ist hiervon natürlich ausgenommen, welcher, wie es sein muss, die drei gleichen reellen Wurzeln $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ liefert.

§ 4.

Um zur Gleichung der Tangente zu gelangen, gehen wir aus von der Verbindungslinie 2 Punkte. Werden die ihnen ent-

*) Salmon-Fiedler höhere ebene Kurven Art. 171.

sprechenden Parameter mit t_1 und t_2 bezeichnet, so stellt sich die Gleichung jener Linie mit Rücksicht auf (2) dar, als

$$(7) \ldots\ldots y(t_1+t_2)-x\left\{t_1^2+t_1t_2+t_2^2(1+t_1^2)\right\}+2at_1^2t_2^2=0$$

$t_1=t_2=t$ gesetzt, giebt uns die gewünschte Tangenten-Gleichung

$$(8) \ldots\ldots 2y-tx(3+t^2)+2at^3=0$$

Für den speciellen Fall $t=0$, erhalten wir in Uebereinstimmung mit dem Früheren $y=0$ d. i. die Rückkehrtangente und ebenso für $t=\infty$, wenn wir vorher durch t^3 dividiren, $x=2a$ d. i. die Wendetangente.

Die Koordinaten des dritten Punktes, den ausserdem die Tangente mit der Cissoide noch gemeinsam haben muss, bestimmen sich nach der unter (6_2) aufgestellten Bedingung, aus welcher, wenn $t_2=t_3=t$ gesetzt wird, der gesuchte Werth $t_1=-\frac{t}{2}$ resultirt Werden also die Koordinaten des Berührungspunktes durch (cfr. 2)

$$x=\frac{2at^2}{1+t^2}$$

$$y=\frac{2at^3}{1+t^2}$$

bezeichnet so finden wir durch Substitution des obigen Werthes $t_1=-\frac{t}{2}$ die Koordinaten des zugehörigen sogenannten Tangentialpunktes*)

$$x_1=\frac{2at^2}{4+t^2}$$

$$y_1=-\frac{at^3}{4+t^2}$$

Durch ganz analoge Betrachtung erhalten wir den ersten

*) cfr. Salmon-Fiedler höhere ebene Kurven Art. 150.

Tangentialpunkt von $(x_1 y_1)$ resp. den zweiten von (x, y), indem wir $t_{11} = -\frac{t_1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 t$ setzen, also

$$x_{11} = \frac{2at^2}{16+t^2}$$

$$y_{11} = \frac{at^3}{2(16+t^2)}$$

u. s. w. für den n^{ten}

$$x_n = \frac{2at^2}{2^{2n}+t^2}$$

$$y_n = (-1)^n \frac{at^3}{2^{n-1}(2^{2n}+t^2)}$$

Der Tangentialpunkt springt also fortwährend, indem die Vorzeichen für y abwechseln, von einem Zweige der Kurve zum anderen über und nähert sich, da t abnimmt, ohne Aufhören dem Rückkehrpunkte $t = 0$.

Betrachten wir ferner die Tangentialpunkte 3 Punkte auf der Cissoide für den speciellen Fall, dass letztere auf einer Geraden liegen, so ergiebt sich, dass gemäss der gefundenen Bedingnng $\left(t_1 = -\frac{t}{2}\right)$ die 3 Parameter der Tangentialpunkte der Gleichung (6_2) genügen also auch auf einer Geraden der sogenannten Begleiterin*) der ersten Geraden liegen. Setzen wir in der Gleichung (7)

$$\frac{t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2}{t_1 + t_2} = m \qquad \frac{2at_1^2 t_2^2}{t_1 + t_2} = -n$$

so lautet die Gleichung der ersten Geraden

$$y = \left(m - \frac{n}{2a}\right) x + n$$

Dann können wir wenn wir die Substitution $\left(t_1 = -\frac{t}{2}\right)$ aus-

*) cfr. Salmon-Fiedler höh. e. K. Art. 150.

führen, die Gleichung der Begleiterin aufstellen, als

$$y = -\left(\frac{m}{2} - \frac{n}{16a}\right)x - \frac{n}{8}$$

Aus diesen beiden vorstehenden Gleichungen resultiren als Koordinaten als Durchschnittspunktes, des sogenannten begleitenden Punktes*) die Werthe:

$$\xi_0 = -\frac{6an}{8am - 3n} \qquad \eta_0 = -\frac{2amn}{8am - 3n}$$

Zur Auflösung des anderen Problems, den Punkt zu bestimmen, in welchem eine von einem Punkte (x, y) der Cissoide gezogene Tangente diese berührt — es ist nur eine Tangente in diesem Falle möglich, wie am Schlusse dieses Paragraphen gezeigt werden wird — benutzen wir wiederum dieselbe Relation (6_2) und erhalten, wenn wir $t_2 = t_3 - t^1$, $t_1 = t$ setzen, $t^1 = -2t$ woraus sich für die Koordinaten des sogenannten Berührungspunktes die Werthe ergeben:

$$x' = \frac{8at^2}{1 + 4t^2}$$

$$y' = -\frac{16at^2}{1 + 4t^2}$$

Ebenso bekommen wir für die Koordinaten des zweiten Berührungspunktes, wenn wir $t'' = 2t' = (-2)^2 t$ setzen

$$x'' = \frac{32at^2}{1 + 16t^2}$$

$$y'' = \frac{128at^3}{1 + 16t^2} \text{ u. s. w.}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{2^{2n+1}at^3}{1 + 2^{2n}t^2}$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{2^{3n+1}at^2}{1 + 2^{2n}t^2}$$

---

*) cfr. Salmon-Fiedler höh. eb. K. Art. 150.

Der Berührungspunkt geht also auch fortwährend von einem Zweige der Kurve auf den anderen über und nähert sich, da t immer mehr wächst, ohne aufhören dem Wendepunkt $t = \infty$. Fassen wir in der Gleichung (8) t als variabel auf und ersetzen $x_1\ y$ durch die Koordinaten eines beliebigen festen Punktes $M\ (x_1\ y_1)$ in der Ebene, so erhalten wir zur Bestimmung der von diesem Punkt möglichen Tangenten an die Cissoide die kubische Gleichung

$$(9) \ldots\ldots t^3 (2a - x_1) - 3tx_1 + 2y_1 = 0$$

Es sind also im allgemeinen von einem Punkte aus 3 Tangenten an die Cissoide möglich, sie ist eine Kurve dritter Klasse wie übrigens schon daraus folgt, dass sie eine Spitze bildet. Aus (9) folgt

$$t = \sqrt[3]{-\frac{y_1}{2a-x_1} + \sqrt{\frac{y_1^2}{(2a-x_1)^2} - \frac{x_1^3}{(2a-x_1)^3}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{y_1}{2a-x_1} - \sqrt{\frac{y_1^2}{(2a-x_1)^2} - \frac{x_1^3}{(2a-x_1)^3}}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{y_1}{2a-x_1}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x_1^3}{y_1^2(2a-x_1)}}\right)} +$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{y_1}{2a-x_1}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{x_1^3}{(2a-x_1)y_1^2}}\right)}$$

Hierzu wollen wir die Gleichung (1) der Cissoide

$$x^3 = y^2 (2a - x)$$

nehmen und es gelten dann je nach der Lage vom M folgende Sätze:

1. ist $\frac{x_1^3}{y_1^2 (2a - x_1)} > 1$ oder $y_1^2 < \frac{x_1^3}{2a - x_1}$

d. h. liegt M ausserhalb der Cissoide nach der convexen Seite, so sind 3 reelle Tangenten möglich.

2. ist $y_1^2 = \frac{x_1^3}{2a - x_1}$

d. h. liegt M auf der Cissoide, so fallen 2 Tangenten zu der in M möglichen zusammen, von M selbst aus ist nur noch eine Tangente konstruirbar

3. ist $y_1^2 > \frac{x_1^3}{2a - x_1}$

d. h. liegt M innerhalb des von der Cissoide und der Axe der Y eingeschlossenen Theiles der Ebene, so ist nur eine Tangente reell. Für negative Werthe von x ist letztere Bedingung stets erfüllt.

II.

§ 5.

Wir wenden uns nunmehr zum zweiten Theile unserer Aufgabe, zu den Beziehungen, die zwischen der Parabel, der Cissoide und einem Kreise, der die in der Einleitung erwähnte Lage zur Parabel hat, bestehen und zu den Anwendungen, die sich unmittelbar hieraus für die Cissoide folgern lassen. Hierbei wollen wir die Koordinaten durch angehängte Indicus unterscheiden, so dass $x_p y_p$, $x_k y_k$, $x_c y_c$ für Punkte, auf der Parabel dem Kreise und der Cissoide resp. gelten. Ist

(10) . . . . . $y_p^2 + 2px_p + 0$

die Gleichung der gegebenen Parabel in rechtwinkligen Koordinaten, so lautet die Gleichung der Tangente am Punkte $x_p\, y_p$, wenn wir die laufenden Koordinaten mit η und ξ bezeichnen,

$$\eta y_p + p\,(x_p + \xi)$$

Das von 0 auf diese Tangente gefällte Perpendikel hat die Gleichung

$$\eta - \frac{y_p}{p}\xi = 0$$

Durch Elimination von x_p und y_p aus den 3 vorstehenden

Gleichungen resultirt als Fusspunktkurve die Cissoide, wenn wir η und ξ durch y_c und x_c ersetzen, in der Form:

$$(11) \quad \ldots \ldots \quad x_c^3 = y_c^2 \left(\frac{p}{2} - x_c\right)$$

Der Durchmesser des Leitkreises ist also gleich dem halben Parameter der Parabel und die Wendetangente fällt mit der Direktrix zusammen. Mit dieser Erzeugungsweise der Cissoide steht in Verbindung, dass der Scheitel einer Parabel, die auf einer ihr gleichen rollt, eine Cissoide beschreibt, wenn die Anfangslage so war, dass bei Beginn der Bewegung beide Parabeln sich auf verschiedenen Seiten der zu ihnen im gemeinsamen Scheitelpunkte gehörigen einen Scheiteltangente befanden. Denn die Lage der 2 Parabeln wird in jedem Moment der Bewegung stets zu der ihnen im jedesmaligen Berührungspunkte gemeinsamen Tangente eine völlig symmetrische sein, letztere also auf der Verbindungslienie der beiden Scheitel im Mittelpunkte derselben senkrecht stehen. Die Koordinaten des Scheitels der rollenden Parabel sind also doppelt so gross, als die des erwähnten Mittelpunktes. Dieser beschreibt aber nach dem Vorigen eine Cissoide. Hieraus folgt mit Rücksicht auf (2), dass auch die Rollkurve eine Cissoide ist, bei welcher der Radius des Leitkreises die doppelte Länge, als bei der ursprünglichen hat.

Aus diesem Grunde ist sie auch die einhüllende Kurve aller der Kreise, deren Mittelpunkte die feste Parabel beschreiben und deren Peripherie fortwährend durch den Scheitel geht. Der analytische Nachweis hierzu ergiebt sich leicht.

Differenziren wir die Gleichung eines solchen Kreises

$$\xi^2 - 2x_p\xi + \eta^2 - 2\eta y_p = 0$$

worin, wie früher, η und ξ die laufenden Koordineten bedeuten nach x_p und y_p, wobei wir beachten, dass vermöge der Gleichung (10) y_p eine Funktion von x_p ist, so erhalten wir:

$$\xi - \eta \sqrt{\frac{p}{-2x_p}} = 0$$

Durch Elimination von x_p und y_p aus den beiden vorstehenden Gleichungen und aus (10) resultirt dann wiederum die bekannte Gleichung der Cissoide.

Nehmen wir zu den beiden Gleichungen (10) und (11) noch die Gleichung des Kreises, der symmetrisch zur Parallelaxe liegend, durch den Scheitel und Brennpunkt gehen soll und drücken die Konstanten in den 3 Gleichungen durch den Radius des Kreises $a = \frac{p}{4}$ aus, so erhalten wir die Gleichungen der 3 zusammengehörigen Kurven in der Form:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } y_p^2 + 8ax_p = 0 \\ \text{II. } x_k^2 + 2ax_k + y_k^2 = 0 \\ \text{III. } x_c^3 = y_c^2(2a - x_c) \end{array} \right.$$

§ 6.

Es sei die Gleichung eines Strahles durch 0 gegeben

$$(13) \quad ty + x = 0$$

dann kommen seinem Durchschnittspunkte K (Fig. 2) mit dem Kreise (12 II) die Werthe zu

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_k = -\frac{2a t^2}{1+t^2} \\ y_k = \frac{2at}{1+t^2} \end{array} \right.$$

Die Gleichungen der Tangente in K an den Kreis

$$(15) \quad 2ty + (1-t^2)x - 2at^2 = 0$$

und des in 0 zu $0K$ errichteten Perpendikels

$$(16) \quad y - tx = 0$$

liefern für den Schnittpunkt C als den Endpunkt der Polar-

tangente die Werthe

$$(17) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} x_c = \dfrac{2at^2}{1+t^2} \\ y_c = \dfrac{2at^3}{1+t^2} \end{cases}$$

Dieses Resultat stimmt mit den unter ((2) § 1) gefundenen Werthen überein, die Koordinaten gehören also einem Punkte auf einer Cissoide an, die demnach, wie in der Einleitung gesagt wurde, der Ort der Endpunkte der Polartangenten eines Kreises ist. Durch Elimination von t überzeugt man sich, dass diese Cissoide genau mit der Fusspunktkurve der Parabel (12_I) mit (12_{II}) übereinstimmt, so dass also in dieser Lage des Kreises zur Parabel dieselbe Cissoide zu beiden Kurven in den erwähnten Beziehungen steht.

Vergleicht man die Werthe von (17) und (18) und die aus ihnen bestimmten zugehörigen Radien vectoren

$$(18) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} r_k = \dfrac{2at^2}{\sqrt{1+t^2}} \\ r_c = \dfrac{2at}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

so ergeben sich zwischen K und C, die entsprechenden Punkte genannt werden mögen, folgende Beziehungen:

I. $$x_c^2 = (-x_k)^2 = y_c \cdot y_k$$

d. h. »die Abscissen entsprechender Punkte sind einander entgegengesetzt gleich und mittleren Proportionalen zwischen den zugehörigen Ordinaten.«

II. Verlängern wir $0C$ bis zum Durchschnitt K_1 mit dem Leitkreise, dessen Gleichung lautet

$$x_{1k}^2 - 2ax_{1k} + y_{1k}^2 = 0$$

so ist (da $y_{1k} = tx_{1k}$ ist)

$$0K_1 = r_{1k} = \frac{2a}{\sqrt{1+t^2}}$$

woraus durch Vergleich mit (18) folgt

$$r_c \cdot r_{1k} = r_k^2$$

d. h. »Der Radius vector des Kreises ist die mittlere Proportionale zwischen dem Radius vector des entsprechenden Cissoiden-Punktes und dem Radius vector des zur selben Anomalie gehörigen Punktes des Leitkreises «

Tragen wir also $0C$ rückwärts von 0 aus bis D auf der Vorlängerung von $0K_1$ ab so ist

$$\sphericalangle DKK_1 = 90^0$$

III. Die Länge $\overline{KC}$ der Verbindungslinie 2 entsprechender Punkte oder, was dasselbe heisst, die Polartangente des Kreises ist

$$\overline{KC} = \sqrt{r_k^2 + r_c^2} = 2at \text{ (cfr. 18)}$$

und da der Abschnitt der Tangente in K auf der Axe der Y aus (15)

$$\overline{A0} = \overline{AK} = at$$

st, so folgt daraus, dass

$$\overline{AC} = \overline{AK} = \overline{A0}$$

ist, die Polartangente also durch die Axe der X halbirt wird. Diese Eigenschaft lässt sich zu einer einfachen Konstruction der Cissoide verwerthen.

Man ziehe die Tangenten an den Kreis und trage jedes Mal die Stücke, die zwischen den Durchschnittspunkten dieser Tangenten mit der Axe der Y und den entsprechenden Berührungspunkten liegen, von ersteren aus nach der entgegengesetzten Seite ab. Die Gesamtheit der so erhaltenen Punkte bildet eine Cissoide, deren Spitze im Anfangspunkt der Koordinaten liegt.

Aus dieser Konstruktion folgt, dass, wenn sich die Kathete $0'K$ (Fig 2) eines rechten Winkels, die eine konstante Länge besitzt, um einen festen Punkt $0'$ dreht, bei dieser Drehung der Punkt auf der zweiten Kathete, die von unbegrenzter Länge

ist, eine Cissoide beschreibt, der auf dieser letzteren so fortgleitet, dass seine Entfernung von dem Scheitel K des rechten Winkels stets durch eine gegebene Gerade halbirt wird. Diese Erzeugung zeigt so eine gewisse Analogie mit der von Newton angegebenen, die zum Vergleich hierher gestellt werden mag.

Gleitet der Endpunkt der Kathete eines rechten Winkels, die eine konstante Länge hat, längs einer gegebenen Geraden auf die Weise fort, dass die zweite unbegränzte Kathete immer durch einen festen Punkt geht, so beschreibt die Mitte der ersten Kathete eine Cissoide.

Betrachten wir weiter die in C zu $0C$ erreichte Senkrechte, die was hier vorläufig schon bemerkt werden mag, nach den früheren Erörterungen Tangente an die Parabel (12_1) ist, so ergiebt sich aus der Gleichung dieser Linie

(19) . . . . . $ty + x - 2at^2 = 0$

dass sie auf der Axe der Y einen Abschnitt

$$\overline{0B} = 2at = \overline{2\,0A}$$

macht. Verbinden wir also B mit K, so ist $0\,C\,B\,K$ ein Rechteck und wir haben den Satz:

»Gleitet die Ecke B eines Rechteckes, deren Gegenecke 0 sich auf der Peripherie eines Kreises fest befindet, so auf der in 0 an den Kreis gezogenen Tangente fort, dass sich die Nebenecke K auf der Peripherie des Kreises weiter bewegt, so beschreibt die vierte Ecke C eine Cissoide.«

§ 7.

Statt des vorigen Rechteckes können wir allgemeiner das Parallelogramm unter sonst denselben Bedingungen sich fortbewegen lassen, welches entsteht, wenn wir durch den Schnittpunkte A der Tangente in K mit der Axe der Y eine Parallele zu $0K$ und durch 0 eine Parallele zur Tangente in K ziehen. Bezeichnen wir den Schnittpunkt mit U so erhalten wir aus der Gleichung von AU

(20) . . . . . $ty + x - at^2 = 0$

und aus der Strahles $0U$

(21) . . . . . $2ty + (1 - t^2)x = 0$

die Relation (durch die Gleichsetzung der Werthe von t^2)

$$t = \frac{x(x-a)}{y(2a-x)}$$

Setzen wir diesen Werth in (20) ein, so resultirt für die Kurve, die U beschreibt, die Gleichung

(22) . . . . . $\frac{x(x-a)}{2a-y} + x - a \cdot \frac{x^2(x-a)^2}{y^2(2a-x^2)} = 0$

also eine Gleichung vierten Grades, die aber zerfällt in

$$x = 0$$

und (22a) . . . . . $y^2(2a-x) = x(x-a)^2$.

Halten wir die Axe der X fest und verschieben die Axe der Y in den Mittelpunkt Q des Leitkreises der vorigen Cissoide indem wir

$$x = x_1 + a$$

setzen, so geht durch diese Koordinaten-Transformation die Gleichung (22a) über in

(23) . . . . . $x_1^2(a + x_1) = y^2(a - x_1)$

oder $2x_1^3 = (a - x_1)(y^2 - x_1^2)$

Aus der Discussion dieser Gleichung folgt*)

$$x_1 = 0$$
$$y = 0$$

ist ein Doppelpunkt und

$$x_1 + y = 0$$
$$x_1 - y = 0$$

*) cf. Salmon-Fiedler höhere ebene Kurven Art. 216.

sind die Tangenten im Doppelpunkte, also der Axe der X in Beziehung auf die neue Axe der Y harmonisch zugeordnet.

$$x_1 = a$$

ist eine Wendetangente, sie fällt in dieser Lage mit jener der betrachteten Cissoide zusammen. Die Kurve ist da sie statt der Spitze eine Schleife bildet, vierter Klasse. (Fig. 2)

Die so erhaltene Kurve wollen wir vergleichen mit dem Ort, denn bei der vorhin erwähnten von Newton angegebenen Konstruktion die Spitze des rechten Winkels beschreibt.

Es sei (Fig. 3) E der gegebene feste Punkt, EMS der rechte Winkel, $0Y$ die Axe der Y die gegebene Gerade und $0E = SM = a$. Dann finden folgende Proportionen statt

(I) $0E : PM = 0R : RP$ oder $0E + PM : PM = 0P : RP$

Setzen wir $0P = y$, $PM = x$ und $0E = a$, so bekommen wir

(II) $$(a + x) : x = y : RP$$

nun ist aus den Dreiecken RPM und SPM

(III) $$x : RP = \sqrt{a^2 - x^2} : x$$

Substituiren wir den für RP sich heraus ergebenden Werth in II so wird

$$(a + x) : y = \sqrt{a^2 - x^2} : x$$
$$x^2 (a + x) = y^2 (a - x)$$

Die so gefundene Gleichung stimmt (23) überein.

Aus der Konstruktion des Punctes M mit Hülfe des Rechteckes $EFSM$, worin ausser der festen Ecke E, die Ecke F durch $EF = a$, S als der Durchschnittspunkt des zu EF in F erreichten Perpendikels mit der gegebenen Gerade Y und somit auch die vierte Ecke M eindeutig bestimmt ist, schliessen wir:

»Liegt die eine Ecke eines Rechteckes statt auf der Peripherie des Kreises (wie bei der Cissoide) im Mittelpunkte des Kreises fest so beschreibt unter sonst denselben Bedingungen für die andern beiden Ecken wir vorhin, die vierte Ecke die

betrachtete Kurve.« Eine andere Konstruktion kann noch auf folgende Betrachtung gegründet werden.

Schlagen wir über ES (Fig. 3) als Durchmesser einen Kreis so erhalten wir M als den Durchschnitt dieses Kreises I mit dem um S mit $SM = a$ beschriebenen Kreise II. Der zweite Durschnittspunkt M' der beiden Kreise fällt offenbar für jede Lage von ES auf der in E errichteten Senkrechten EW, da $SM' = 0E$ und $\sphericalangle EM'S = R$ ist.

Die Mittelpunkte aller Kreise I liegen nun, wie man leicht sieht, auf der senkrechten Halbirungslienie von $0E$ auf $0'V$, sie gehen also sämmtlich noch durch den zweiten festen Punkt 0, Die Kreise I bilden ein Kreisbüschel, das wenn wir $0'A = \lambda$ setzen, durch die Gleichung repräsentirt wird

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y - \lambda)^2 = \frac{a^2}{4} + \lambda^2$$

$$x^2 + ax + y^2 - 2\lambda y = 0$$

Da $0S = 20'A = 2\lambda$ ist, so resultirt für das System der Kreise II die sämmtlich ihren Mittelpunkt auf der Axe der Y liegen haben und einen konstanten Radius a besitzen,

$$x^2 + (y - 2\lambda)^2 = a^2$$

Eliminirten wir λ, so würden wir, wie es sein muss,

$$x + a = 0$$

d. i. die Gerade EW und die früher gefundene Gleichung (23) erhalten.

Ziehen wir ferner $AC' \| EM$, so ist $SC' = MC'$ also C' ein Punkt der Cissoide und wir haben den Satz:

»Bewegen sich die Endpunkte der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem die eine Kathete eine konstante Länge hat, längs 2 parallelen Geraden, so dass die Hypotenuse stets durch einen festen Punkt geht, so beschreibt der Scheitel des rechten Winkels eine Cissoide.«

Durch analoge Betrachtung, wie bei der vorigen Kurve,

ergiebt sich dann weiter die Cissoide als der Ort der Durchschnittspunkte zweier zusammengehöriger Kreissysteme, von denen die einen (die über AS als Durchmesser beschriebenen Kreise) ihre Mittelpunkte B sämmtlich auf $0''Z$, der in der Mitte von $0'0$ erreichten Senkrechten liegen haben und die anderen um den Schnittpunkt der festen Geraden $0Y$ mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte B mit E, mit einem konstanten Radius $SC' = \frac{a}{2}$ beschrieben werden.

Wenn wir beachten, dass nach der vorhin angewandten Bezeichnung $B0'' = \frac{3}{2}\lambda$ ist, so werden die Systeme durch die beiden Gleichungen repräsentirt:

$A.$ $$\left(y + \frac{a}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\lambda\right)^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{\lambda^2}{4}$$ oder

$A'.$ $$x^2 + \frac{ax}{2} + y^2 - 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0$$

und

$B.$ $$x^2 + (y - 2\lambda)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Subtrahiren wir B von der mit 2 multiplicirten Gleichung A', so resultirt

$C.$ $$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - 2\lambda y = 0$$

d. i. die Gleichung eines Kreisbüschels, welches die Axe der X in $0'$ berührt und dessen Mittelpunkte sämmtlich auf $0'V$ liegen. Es erscheint also die Cissoide als der Ort der Durchschnittspunkte eines Kreisbüschels (durch 2 ∞ nahe liegende Punkte) mit den entsprechenden Kreisen eines Systems, die von konstantem Radius ihre Mittelpunkte auf der Axe der Y liegen haben.

Durch Elimination von λ aus den beiden Gleichungen

C und B würden wir erhalten

$$x + \frac{a}{2} = 0$$

d. i. der Strahl $0V$, auf dem die zweiten Durchschnittspunkte der Kreise liegen und

$$y^2\left(x - \frac{a}{2}\right) + \left(x + \frac{a}{2}\right)^3 = 0,$$

welche Gleichung durch die Transformation auf $0'$, durch

$$x_1 = x + \frac{a}{2}$$

in die bekannte Gleichung der Cissoide übergeht.

§ 8.

Wir sahen, dass die schon vorhin benutzte Senkrechte (19) die in C zu $0C$ (Fig. 4) errichtet wurde und deren Gleichung lautete (19)

$$ty + y - 2at^2 = 0$$

Tangente an die gegebene Parabel 12_1

$$y_p^2 + 8ax_p = 0$$

war. Die Verbindung dieser beiden Gleichungen liefert als Koordinaten des Berührungspunktes P (Fig. 4) auf der Parabel

(24) . . . . . $\begin{cases} x_p = -2at^2 \\ y_p = 4at. \end{cases}$

Zwischen den Punkten K, C, P, die auf diese Weise eindeutig auf einanderbezogen sind, bestehen dann aus den Gleichungen (14), (17) und (24) folgende Beziehungen:

I. $$y_p = 2KC$$

»Die Ordinate des entsprechenden Parabelpunktes ist gleich der doppelten Entfernung des Kreispunktes vom zugehörigen Cissoidenpunkte.«

II. $$tang\ P0X = \frac{y_p}{x_p} = -\frac{2}{t}$$

$$tang\ K0X = \frac{y_k}{x_k} = -\frac{1}{t}$$

also

$$tang\ P0Y = \frac{t}{2}$$

$$tang\ K0Y = t$$

Die Verlängerung des Radius vector $0K$ des Kreises schneidet also die verlängerte Abscisse PD des Parabelpunktes in einem Punkte D', so dass $PD' = PD$ ist.

Aus der obigen Beziehung zwischen den Tangenten der Neigungswinkel (von der Axe der Y ausgerechnet) folgern wir den Satz:

»Verhalten sich die Tangenten der Neigungswinkel, welche die Verbindungslienien 2 Punkte auf der Parabel und dem Kreise mit 0, mit der Axe der Y d. i. mit der Scheiteltangente bilden, wie 2 : 1, so liegen die Schnittpunkte der in ihnen konstruirten Tangenten auf einer Cissoide.«

Ziehen wir die Winkel in Betracht, welche diese Tangenten mit der Scheiteltangente bilden, so sehen wir aus Fig. 4, dass

$$\sphericalangle PBD = \sphericalangle K0D = \sphericalangle \frac{KAD}{2} \text{ ist.}$$

Die Winkel den die geometrischen Tangenten mit jener Geraden bilden, verhalten sich also direct wie 2 : 1.

III. Es ist

$$PB = \sqrt{\frac{y_p^2}{4} + x_p^2} = 2at\sqrt{1+t^2}$$

$$BC = \sqrt{\frac{y_p^2}{4} - 0C^2} = \frac{2at}{\sqrt{1+t^2}} \text{ (cfr. 18)}$$

also

$$PB \,.\, BC = KC^2$$

»Das Rechteck gebildet aus den Abschnitten, in welche die Parabeltangente vom Berührungspunkte aus gerechnet durch die Scheiteltangente und Cissoide zerlegt wird, ist gleich dem Quadrate aus der Entfernung des zugehörigen Kreispunktes vom Cissoidenpunkte.«

§ 9.

Die durch den Brennpunkt gezogene Berührungssehne FP ist, wie aus ihrer Gleichung folgt

(25) . . . . . $y(1-t^2)-2tx-4at=0$

dem durch K gezogenen Durchmesser des Kreises, der Linie $0'K$

(26) . . . . . $y(1-t^2)-2tx-2at=0$

parallel. Es ist also $\sphericalangle PF0 = \sphericalangle K0'0$ d. h.

»Bewegen sich 2 Punkte auf dem Kreise und der Parabel, von den resp. Brennpunkten ausgerechnet mit derselben Winkelgeschwindigkeit, so schneiden sich die in ihnen konstruirten Tangenten auf einer Cissoide.«

Anmerkung.

Verlängern wir $0D'$ bis zum Durchschnitt V mit der Parabel, so bekommen wir aus (12_1) und (13) für die Koordinaten dieses Punktes die Werthe

$$\xi_p = -8at^2 = -2a(2t)^2$$
$$\eta_p = 8at = 4a(2t)$$

Aus den Gleichungen einerseits der Tangente in V an die Parabel, die wir erhalten, wenn wir in (19) für t den Werth $2t$ einsetzen

$$2ty + x - 8at^2 = 0$$

und andererseits der Tangente in K an den Kreis (cfr. 15)

$$2ty + (1-t^2)x - 2at^2 = 0$$

ergiebt sich als Abscisse ihres Schnittpunktes

$$x_0 = 6a$$

d. h. »Bewegen sich 2 Punkte auf den beiden Kurven vom Scheitel aus gerechnet mit derselben Winkelgeschwindigkeit, so liegen die Schnittpunkte der in ihnen konstruirten Tangenten auf einer im Abstande $x_0 = 6a$ gezogenen Parallelen zur Axe der Y.«

Als Koordinaten des Schnittpunktes R der Sehne FP mit dem Radius vector $0K$ resultiren aus (13) und (25) die Werthe

$$(27) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} \xi_0 = -\dfrac{4at^2}{1+t^2} \\ \eta_0 = \dfrac{4at}{1+t^2} \end{cases}$$

woraus durch Vergleich mit (14) folgt, dass R auf der Peripherie des um den Brennpunkt F mit seiner Entfernung vom Scheitel beschriebenen Kreises liegt. Da $CP \| 0K$ ist, so folgt der Satz:

»Zieht man durch den Scheitel der Parabel Parallele zu den Tangenten, so liegen die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den durch den Brennpunkt gezogenen Berührungssehnen auf der Peripherie des Kreises, der um den Brennpunkt mit seiner Entfernung vom Scheitel beschrieben wird.«

Der K auf dem Kreise diametral gegenüber liegende Punkt K' und der zweite Punkt P' in welchem FP die Parabel noch schneidet, entsprechen sich nach dem obigen Satze da $PP' \| KK'$ ist, in derselben Weise, wie K und P. Ihre Koordinaten und die des zugehörigen Punktes C' der Cissoide (der natürlich auf Verlängerung von $0K$ liegen muss) erhalten wir, da $0K \perp 0K'$ ist, einfach dadurch, dass wir in den Formeln 14, 17 und 24 für t den Werth $-\frac{1}{t}$ substituiren, also

$$(28) \ldots K' \begin{cases} x_k' = -\dfrac{2a}{1+t^2} \\ y_k' = -\dfrac{2at}{1+t^2} \end{cases} C \begin{cases} x_c' = \dfrac{2a}{1+t^2} \\ y_c' = -\dfrac{2a}{t(1+t^2)} \end{cases} P' \begin{cases} x_p' = -\dfrac{2a}{t^2} \\ y_p' = -\dfrac{4a}{t} \end{cases}$$

Während beim Kreise die in den beiden Punkten gezogenen Tangenten parallel gehen, stehen die beiden Parabeltangenten in P und P' auf einander senkrecht in der Directrix da ihre Berührungssehne durch den Brennpunkt geht.

Aus der Gleichung der Verbindungslinie KP

$$t^3y + (1 + 2t^2)\,x + 2at^2 = 0$$

folgt, dass sie auf der Axe der Y einen Abschnitt

$$0B' = -\frac{2a}{t}$$

macht, der nach den in § 6 III. gemachten Erörterungen mit dem Abschnitt zusammenfällt, denn die Tangente in P' (für t $-\frac{1}{t}$ gesetzt) auf derselben Axe macht. Umgekehrt geht aus demselben Grunde auch $K'P'$ durch B.

Vergleichen wir die Verbindungslinie CC'

$$ty\,(1 - t^2) + x\,(1 + t^4) - 2at^2 = 0$$

mit der Geraden KK' (2)

$$y\,(1 - t^2) - 2tx - 2at = 0$$

so ergiebt sich die ähnliche Relation für den Kreis und die Cissioide, indem sich diese beiden Linien auch auf der Axe der Y schneiden.

Weiter finden wir mit Benutzung der Gleichung (18), dass

$$0K \,.\, 0K' = \frac{2at}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{4a^2t}{1+t^2} = 0C \,.\, 0C'$$

d. h. die beiden Dreiecke $0KK'$ und $0CC'$ sind von gleichen Inhalte, es verhält sich

$$0K : 0C = 0C' : 0K'.$$

Da ferner $K'C'$ und KC senkrecht anf $K'K$ stehen, so folgt noch der Satz: »Dreht sich ein rechtwinkliges $\triangle$ $0KK'$ so um den Scheitel 0 des rechten Winkels, dass sich K und K' auf der Peripherie eines Kreises bewegen, so beschreibt der

Punkt C (resp. C') eine Cissoide, in welchem die in dem einen Endpunkt der Kathete zur Hypotenuse errichtete Senkrechte die Verlängerung der anderen schneidet.«

§ 10.

Nach Gleichung (8) § 4 hat die Tangente in C die Gleichung

(29) . . . . . $2y - tx(3 + t^2) + 2at^3 = 0$

$x = 0$ gesetzt, liefert als ihren Abschnitt aus der Axe der Y

$$y_0 = -at^3$$

ein geeignetes Mittel zu ihrer Konstruktion.

Errichten wir in A (Fig. 4) zu $0'A$ eine Senkrechte, die die Axe der X in T schneidet, ebenso in T eine Senkrechte zu AT, welche die Axe der Y in U schneidet, so ist weil $0A = at$ ist, $0U = -at^3$, also UC die Tangente in C. Betrachten wir zu der Tangente in C noch die Tangente an dem Punkte, in welchem die durch C gezogene Parallele zur Axe der Y die Cissoide schneidet, die also nach (§ 3) durch die Substitution des Werthes $-t$ für t in (29) bestimmt ist, so lautet ihre Gleichung

(30) . . . . . $2y + tx(3 + t^2) - 2at^3 = 0$

Diese beiden Tangenten (29) und (30) schneiden sich auf der Axe der X d. h.

»Die Schnittpunkte von Tangenten an solche Punkte der Cissoide, deren Verbindungslinie durch den Wendepunkt geht, liegen auf der Rückkehrtangente.«

Zu einer zweiten Construktion der Tangente gelangen wir, wenn der Winkel in Betracht gezogen wird, den die Normale in C mit der Kreistangente bildet. Die Gleichung dieser Normalen erhalten wir, da aus (29) der Richtungscoefficient der Tangente

$$m = \frac{t}{2}(3 + t^2)$$

in der Form

$$\frac{t}{2}(3+t^2)\,y + x - \frac{2at^2}{1+t^2}(2+t^2) = 0$$

Die Tangente in K an den Kreis hatte die Gleichung (15)

$$2ty + (1-t^2)\,x - 2at^2 = 0$$

woraus für die Tangente des Neigungswinkels φ_1 der beiden Geraden folgt:

$$tang\,\varphi_1 = \frac{t}{2}$$

Konstruiren wir das Rechteck $0CPE$, worin PE die Parabelnormale ist, so ist

$$\begin{array}{l} \sphericalangle ECP = \sphericalangle E0P \\ \sphericalangle K0B = \sphericalangle KCB \\ \hline \sphericalangle KCE = \sphericalangle P0D = \frac{t}{2} \text{ (§ 8. II.)} \end{array}$$

Die Diagonale CE des Rechteckes ist also die Normale in C an die Cissoide, sie halbirt den Radius vector $0P$ woraus ihre Konstruktion sich einfach ergiebt.

Ebenso bestehen wechselseitige Beziehungen zwischen den Koordinaten der Krümmungsmittelpunkte.

Zunächst ergiebt sich aus 24 für die Parabel:

$$\frac{dy_p}{dx_p} = -\frac{1}{t}$$

$$(31) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^2y_p}{dx^2{}_p} = \frac{d\,\frac{dy_p}{dx_p}}{dt} \cdot \frac{dt}{dx_p} = \frac{1}{t^2} \cdot -\frac{1}{4at} = -\frac{1}{4at^3}$$

Nach den bekannten Formeln für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes ist dann

$$(32) \quad \ldots\ldots \quad x_{pm} = -2a(2+3t^2) = -(4a+3x_p)$$

$$y_{pm} = -4at^3$$

d. i. = dem vierfachen Abschnitte, den die Cissoiden-Tangente in C auf der Axe der Y macht.

Durch Elimination von t erhalten wir aus (32)

(32a) . . . . . $2say^2 + 2(x+4a)^3 = 0$

die Gleichung der semikubischen Parabel, die bekanntlich die Evolute der gewöhnlichen Parabel ist.

In analoger Weise resultiren aus (1) für die Cissoide als Werthe der Differenzialquotienten

$$\frac{dy_c}{dx_c} = \frac{t}{2}(3+t^2)$$

$$(33) \quad \frac{d^2y_c}{dx_c^2} = \frac{3(1+t^2)^3}{8at}$$

also für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$(34) \quad \begin{cases} x_{cm} = -\frac{at^2}{3}(6+t^2) \\ y_{cm} = \frac{8at}{3} \end{cases}$$

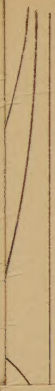
Wir erhalten also, wenn wir im Abstande

$$y_0 = \frac{2}{3}y_p$$

eine Parallele zur Axe der X ziehen, den Krümmungsmittelpunkt als den Schnittpunkt dieser Parallelen mit der nach dem Vorigen leicht konstruirbaren Normalen.

Durch Elimination von t bekommen wir die Gleichung der Evolute in der Form

(34a) . . . . . $4096x + 1152a^2y^2 + 27y^4 = 0.$

Lebenslauf.

Ich Franz Carl Anton Wünnenberg, Sohn des Amtmann Emil Wünnenberg zu Nienborg in Westfalen, bin geboren den 9. Februar 1861 zu Warendorf. Die erste Schulbildung genoss ich an der Elementarschule meiner Vaterstadt, besuchte dann das Gymnasium zu Hildesheim und von Ostern 1877 an das zu Münster. Nach bestandenem Maturitätsexamen bezog ich im Sommer-Semester 1880 die Akademie zu Münster, um mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften zu widmen. Hier verweilte ich bis zum Schluss des Winter-Semester 1881/82. Vom Herbst des Jahres 1882 an besuche ich die Vorlesungen an der Universität Marburg. Während meiner Studienzeit hörte ich die Vorlesungen der Herren Professoren: Bachmann, Bergmann, Cohen, von Drach, Greeff, Hess, Hosius, Klocke, Landois, Melde, Nitschke, Stegmann, Sturm, Wigand und der Herren Docenten Dr. Elsas, Dr. Klein. Allen diesen meinen hochverehrten Herren Lehrern spreche ich hiermit meinen wärmsten Dank aus.